©2004. **И.И. Скрыпник**

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ РЕГУЛЯРНОСТИ ГРАНИЧНОЙ ТОЧКИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

Установлено необходимое условие регулярности граничной точки для общего квазилинейного параболического уравнения, вырождающегося аналогично уравнению пористой среды. Доказано, что для регулярности точки (x_0, t_0) на боковой поверхности цилиндрической области $\Omega \times (0, T)$ необходимо выполнения для точки $x_0 \in \Omega$ классического условия Винера.

1. Введение.

Рассматривается поведение решения нелинейного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i\Big(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\Big) = a_0\Big(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\Big) \tag{1.1}$$

вблизи границы цилиндрической области $\Omega_T \equiv \Omega \times (0, T)$.

Предполагается, что функции $a_i(x, t, u, \xi)$, $i = 0, ..., n$, $(x, t) \in \Omega_T$, $u \in R_1$, $\xi \in R^n$, $n > 2$, удовлетворяют условию Каратеодори и неравенствам

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x, t, u, \xi)\xi_i \geqslant \nu_1 |u|^{m-1} \cdot |\xi|^2, \ m > 1 - \frac{2}{n}, \tag{1.2}$$

$$|a_i(x, t, u, \xi)| \leqslant \nu_2 |u|^{m-1}|\xi| + h_i(x, t), \ i = 0, ..., n \tag{1.3}$$

с положительными постоянными ν_1, ν_2 и неотрицательными функциями $h_i(x, t)$.

Предполагаем следующие условия для функций $h_i(x, t)$

$$\begin{gathered} h_0(x, t) + [\overline{h}(x, t)]^2 \in L_r(0, T; L_q(\Omega)), \\ \overline{h}(x, t) = 1 + \textstyle\sum_{i=1}^{n} h_i(x, t), \ \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1, \ q, r > 1. \end{gathered} \tag{1.4}$$

В случае $m = 1$ Гёльдеровость решений уравнения (1.1) внутри Ω_T и вблизи гладкой границы области хорошо известна (см., например, [1]). Случай $m \neq 1$ был рассмотрен в работах Д.Г.Аронсона, Ф.Бенилана [2], Е.Ди Бенедетто, А.Фридмана [3], А.В.Иванова [5].

Регулярность граничной точки при $m = 1$ была исследована в работах В.Цимера [6], И.В.Скрыпника [7], где были получены соответственно достаточное и необходимое условие.

Необходимое условие регулярности граничной точки для вырождающихся квазилинейных параболических уравнений получено автором в [8].

Цель данной работы получить необходимое условие регулярности граничной точки для уравнения (1.1) при $m > 1 - \frac{2}{n}$. При этом развит метод доказательства необходимого условия регулярности граничной точки, основанный на подходе, предложенном для эллиптического случая в [8].

Под решением уравнения (1.1) понимаем функцию $u(x,t) \in C(0,T;L_2(\Omega))$, удовлетворяющую условию $|u(x,t)|^{\frac{m-1}{2}}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \in L_2(\Omega_T)$ и интегральному тождеству

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega}\left\{\frac{\partial}{\partial t}[u(x,t)]_h\,\varphi(x,t)+\sum_{i=1}^{n}\left[a_i\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]_h\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}-\right.$$
$$\left.-\left[a_0\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]_h\varphi(x,t)\right\}dxdt=0 \tag{1.5}$$

при произвольной функции $\varphi(x,t) \in C(0,T;L_2(\Omega))\cap L_2\left(0,T;\overset{\circ}{\rightarrow} W_2^1(\Omega)\right)$ и произвольных t_1, t_2, h таких, что $0<h<t_1<t_2<T-h$. Здесь

$$[u(x,t)]_h=\frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h}u(x,s)\,ds.$$

Будем говорить, что $(x_0,t_0)\in S_T=\partial\Omega\times(0,T)$ регулярная граничная точка уравнения (1.1), если для произвольного решения $u(x,t)$ этого уравнения, удовлетворяющего условию

$$\varphi(x,t)\,[u(x,t)-f(x,t)]\in L_2\left(0,T;\overset{\circ}{\rightarrow} W_2^1(\Omega)\right) \tag{1.6}$$

с функцией $f(x,t)\in C\left(\overline{\Omega}_T\right)\cap W_2^{1,1}(\Omega_T)$, $\varphi(x,t)\in C^1(R^{n+1})$, $\varphi(x,t)\equiv 1$ в некоторой окрестности точки (x_0,t_0), выполнено равенство

$$\lim r\to 0\,\{ess\ \sup\,[u(x,t):(x,t)\in\Omega_T\cap Q_r(x_0,t_0)]\}=$$
$$=\lim_{r\to 0}\{ess\ \inf\,[u(x,t):(x,t)\in\Omega_T\cap Q_r(x_0,t_0)]\}=f(x_0,t_0). \tag{1.7}$$

Здесь $Q_r(x_0,t_0)=B_r(x_0)\times(t_0-r^2,\,t_0+r^2)$ и $B_r(x_0)$ – шар в R^N с центром x_0 и радиуса r.

Основным результатом работы является следующая теорема

Теорема 1.1. *Предположим, что выполнены условия (1.2)-(1.4). Для того, чтобы точка $(x_0,t_0)\in S_T$ была регулярной для уравнения (1.1), необходимо, чтобы*

$$\int\limits_0^1\frac{C(B(x_0,r)\setminus\Omega)}{r^{n-2}}\,\frac{dr}{r}=\infty, \tag{1.8}$$

здесь $C(E)$ – ньютоновская емкость множества $E\subset R^n$, $B(x_0,r)=\{x\in R^n:|x-x_0|<r\}$.

2. Вспомогательные утверждения..

Будем доказывать нерегулярность граничной точки $(x_0,t_0)\in S_T$ при условии, что

$$\int\limits_0^1\frac{C(B(x_0,r)\setminus\Omega)}{r^{n-1}}\,dr<\infty. \tag{2.1}$$

Методом Мозера просто доказывается ограниченность вблизи (x_0, t_0) решения уравнения (1.1), удовлетворяющего условию (1.6). Поэтому далее можем считать, не ограничивая общности, что $u(x,t) \in L_\infty(\Omega_T)$ и обозначим $M = ess\ \sup\{|u(x,t)|,\ (x,t) \in \Omega_T\}+1$.

Пусть l, R – произвольные положительные числа такие, что $\frac{1}{4} \leqslant l \leqslant M$, $(t_0 - R^2,\ t_0 + R^2) \subset (0,T)$ и обозначим $B = B(x_0, R)$, $Q \equiv B \times (t_0 - R^2,\ t_0 + R^2)$.

Будем предполагать, что функции $\xi(x)$, $\eta(x)$, $\zeta(x)$ определены в R^n и удовлетворяют условиям

1) $\xi(x),\ \eta(x) \in W_2^1(B),\ \xi(x)\cdot\zeta(x) \in \overset{\circ}{\to} W_2^1(B)$;

2) $0 \leqslant \xi(x) \leqslant 1,\ \xi(x) = 1$ в $B\big(x_0, \frac{R}{2}\big), \xi(x) = 0$ вне $B(x_0, R), \left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right| \leqslant \frac{4}{R}$;

3) $\zeta(x)$ вне $\Omega,\ 0 \leqslant \zeta(x) \leqslant 1,\ \int\limits_B \left|\frac{\partial}{\partial x}(\xi(x)\zeta(x))\right|^2 dx \leqslant c\, R^{n-2}$;

4) $0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1,\ [1-\eta(x)]\cdot[1-\zeta(x)] \equiv 0$.

Определим $\theta(t)$ так, чтобы удовлетворялись условия

$$\theta(t) = 1 \text{ при } t \in \Big(t_0 - \tfrac{4}{9}\cdot R^2,\ t_0 + \tfrac{4}{9}\cdot R^2\Big),\ \theta(t) = 0 \text{ при } t \notin (t_0 - R^2,\ t_0 + R^2)$$

$$0 \leqslant \theta(t) \leqslant 1,\ \left|\tfrac{d\theta}{dt}\right| \leqslant \tfrac{2}{R^2},\ \theta(t) \in C^\infty(R^1).$$

Обозначим $\sigma(x) = \xi(x)\,\zeta(x)\,\eta(x), \omega(x) = \xi(x)\cdot\zeta(x)$, $L = Q\cap\Omega_T\cap\{u > l\}, L(\tau) = \{(x,t) \in L : t = \tau\}$, $E = L \cap \{\eta(x) < 1\}$, $F = L\cap\{\eta(x) = 1\}$.

В дальнейшем через C_i будем обозначать положительные постоянные, зависящие лишь от n, m, ν_1, ν_2, M и норм функций $h_1(x,t),\ \ i = 0, ..., n$ в пространстве $L_r(0,T; L_q(\Omega))$.

Определим число λ равенством

$$\lambda = \min\left\{\frac{1}{8},\ m,\ \frac{1}{n}\right\}. \tag{2.2}$$

Теорема 2.1 *Предположим, что выполнены условия (1.2)-(1.4) и $u(x,t)$ – ограниченное решение уравнения (1.1). Тогда при любых $\delta > 0$, $k > 2$ справедлива оценка*

$$\begin{aligned} &\underset{0<t<T}{ess\sup} \int\limits_{L(t)} G\left(\tfrac{u(x,t)-l}{\delta}\right)\omega^k(x)\,\theta^k(t)\,dx + \iint\limits_L \left|\tfrac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right|^2 \omega^k(x)\,\theta^k(t)\,dxdt \leqslant \\ &\leqslant \tfrac{K_1}{R^2}\iint\limits_E \left(1 + \tfrac{u(x,t)-l}{\delta}\right)^{1-\frac{\lambda}{2}} \left(\tfrac{u(x,t)-l}{\delta}\right)^{\lambda} \omega^{k-2}(x)\,\theta^{k-1}(t)\,dxdt + \\ &+K_1\tfrac{R^2}{\delta}\int\limits_B \left|\tfrac{\partial\sigma}{\partial x}\right|^2 dx + K_1\tfrac{R^{n+\alpha}}{\delta} \end{aligned} \tag{2.3}$$

с постоянной K_1, зависящей лишь от известных величин и k. Здесь $G(s) = s$ при $s \geqslant 1$, $G(s) = s^{2-\lambda}$ при $0 \leqslant s \leqslant 1$, $\alpha = 1 - \frac{1}{r} - \frac{n}{2q}$,

$$w(x,t) = \Phi\left(\frac{u(x,t)-l}{\delta}\right),\ \Phi(z) = \left[\int\limits_0^z (1+s)^{-\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{4}}\, s^{-\frac{\lambda}{2}} ds\right]_+. \tag{2.4}$$

Доказательство. Будем использовать обозначения $[v(x,t)]_+ = \max\{v(x,t),0\}$ для произвольной функции v. Подставим в интегральное тождество (1.5) пробную функцию

$$\varphi(x,t) = \left[\int\limits_l^{[u(x,t)]_h} \left(1+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-1+\frac{\lambda}{2}} \left(\varepsilon+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-\lambda} ds\right]_+ \omega^k(x)\,\theta^k(t). \tag{2.5}$$

Используя неравенства (1.2), (1.3), переходя к пределу при $h\to 0$, $\varepsilon\to 0$, получим

$$\begin{gathered}
\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T}\int\limits_{L(t)}\left\{\int\limits_l^{u(x,t)}\int\limits_l^{v}\left(1+\tfrac{s-l}{\delta}\right)^{-1+\frac{\lambda}{2}}\left(\tfrac{s-l}{\delta}\right)^{-\lambda} dsdv\right\}\theta^k(t)\,\omega^k(x)dxdt+ \\
+\iint\limits_L \left(1+\tfrac{u(x,t)-l}{\delta}\right)^{-1+\frac{\lambda}{2}}\left(\tfrac{u(x,t)-l}{\delta}\right)^{-\lambda} u^{m-1}(x,t)\left|\tfrac{\partial u}{\partial x}\right|^2\omega^k(x)\theta^k(t)dxdt \leqslant \\
\leqslant C_1\,\delta\iint\limits_L u^{m-1}(x,t)\left|\tfrac{\partial u}{\partial x}\right|\left\{\omega^k(x)+\omega^{k-1}(x)\left|\tfrac{\partial\omega(x)}{\partial x}\right|\right\}\theta^k(t)dxdt+ \\
+C_1\iint\limits_L\left\{\int\limits_l^{u(x,t)}\int\limits_l^{v}\left(1+\tfrac{s-l}{\delta}\right)^{-1+\frac{\lambda}{2}}\left(\tfrac{s-l}{\delta}\right)^{-\lambda} dsdv\right\}\omega^k(x)\theta^{k-1}(t)\left|\tfrac{\partial\theta}{\partial t}\right|dxdt+ \\
+C_1\,\delta\iint\limits_L\left\{h_0(x,t)\,\omega^k(x)+\overline{h(x,t)}\omega^{k-1}(x)\left|\tfrac{\partial\omega(x)}{\partial x}\right|\right\}\theta^k(t)dxdt.
\end{gathered} \tag{2.6}$$

Отметим просто проверяемые неравенства

$$\int\limits_l^{u(x,t)}\int\limits_l^{v}\left(1+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-1+\frac{\lambda}{2}}\left(\frac{s-l}{\delta}\right)^{-\lambda} dsdv \geqslant C_2\delta^2\,G\left(\frac{u(x,t)-l}{\delta}\right) \tag{2.7}$$

при $u(x,t)>l$,

$$w(x,t)\leqslant C(\gamma)\left[\frac{u(x,t)-l}{\delta}\right]^{\frac{2-\lambda}{4}} \tag{2.8}$$

при $u(x,t)-l\geqslant\gamma\delta$, $0<\gamma\leqslant 1$, с постоянной $C(\gamma)$, зависящей лишь от известных параметров и γ,

$$\int\limits_l^{u(x,t)}\int\limits_l^{v}\left(1+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-1+\frac{\lambda}{2}}\left(\frac{s-l}{\delta}\right)^{-\lambda} dsdv \leqslant C_3\delta\,[u(x,t)-l] \text{ при } u(x,t)>l. \tag{2.9}$$

Интегралы в правой части (2.6) представим в виде суммы интегралов по E и F, учитывая, что $L=E\cup F$. Оценим вначале интегралы по E, замечая, что при этом $\omega(x)=\xi(x)$.

Имеем

$$\delta \iint\limits_E u^{m-1}(x,t)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\left\{\omega^k(x)+\omega^{k-1}(x)\left|\frac{\partial\omega(x)}{\partial x}\right|\right\}\theta^k(t)dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_4\frac{\delta}{R}\iint\limits_E u^{m-1}(x,t)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\omega^{k-1}(x)\,\theta^k(t)dxdt \leqslant \tag{2.10}$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\iint\limits_L \left(1+\frac{u(x,t)-l}{\delta}\right)^{-1+\frac{\lambda}{2}}\left(\frac{u(x,t)-l}{\delta}\right)^{-\lambda}u^{m-1}(x,t)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\omega^k(x)\theta^k(t)dxdt+$$

$$+C_5\frac{\delta^2}{R^2}\iint\limits_E\left(\frac{u(x,t)-l}{\delta}\right)^{\lambda}\left(1+\frac{u(x,t)-l}{\delta}\right)^{1-\frac{\lambda}{2}}\omega^{k-2}(x)\theta^k(t)dxdt.$$

Далее, в силу (2.9), имеем

$$\iint\limits_E\left\{\int\limits_l^{u(x,t)}\int\limits_l^{v}\left(1+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-1+\frac{\lambda}{2}}\left(\frac{s-l}{\delta}\right)^{-\lambda}dsdv\right\}\omega^k(x)\,\theta^{k-1}(t)\left|\frac{\partial\theta}{\partial t}\right|dxdt \leqslant \tag{2.11}$$

$$\leqslant C_6\frac{\delta}{R^2}\iint\limits_E[u(x,t)-l]\omega^k(x)\,\theta^{k-1}(t)dxdt.$$

Условие (1.4) позволяет просто оценить последний интеграл в (2.6)

$$\delta\iint\limits_E\left\{h_0(x,t)\omega^k(x)+\overline{h(x,t)}\omega^{k-1}(x)\left|\frac{\partial\omega(x)}{\partial x}\right|\right\}\theta^k(t)dxdt\leqslant C_7\delta R^{n+\alpha}. \tag{2.12}$$

Для оценок интегралов по F, соответствующих слагаемым правой части (2.6), подставим в интегральное тождество (1.5) функцию

$$\varphi(x,t)=[[u(x,t)]_h-l]_+\sigma^k(x)\theta^k(t).$$

Используя условия (1.2), (1.3) и переходя к пределу при $h\to 0$, получаем

$$ess\sup_{0<t<T}\int\limits_{L(t)}[u(x,t)-l]_+^2\,\sigma^k(x)\theta^k(t)dx+$$

$$+\iint\limits_L u^{m-1}(x,t)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\sigma^k(x)\theta^k(t)dxdt\leqslant$$

$$\leqslant C_8\iint\limits_L u^{m-1}(x,t)\,[u(x,t)-l]\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\sigma^{k-1}(x)\theta^k(t)\left\{\sigma(x)+\left|\frac{\partial\sigma(x)}{\partial x}\right|\right\}dxdt+ \tag{2.13}$$

$$+C_8\iint\limits_L[u(x,t)-l]^2\sigma^k(x)\theta^{k-1}(t)\left|\frac{\partial\theta}{\partial t}\right|dxdt+$$

$$+C_8\iint\limits_L[u(x,t)-l]\sigma^{k-1}(x)\theta^k(t)\left\{\overline{h}(x,t)\left|\frac{\partial\sigma(x)}{\partial x}\right|+h_0(x,t)\right\}dxdt.$$

Отсюда, применяя неравенства Пуанкаре и Юнга, получим

$$\begin{gathered}\underset{0<t<T}{ess\sup}\int\limits_{L(t)}[u(x,t)-l]_+^2\,\sigma^k(x)\theta^k(t)dx+\\ +\iint\limits_{L}u^{m-1}(x,t)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\sigma^k(x)\theta^k(t)dxdt\leqslant C_9R^2\int\limits_{B}\left|\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right|^2dx+C_9R^{n+\alpha}.\end{gathered}\tag{2.14}$$

Так как $\omega(x)=\sigma(x)$ на F, то используя (2.14), получаем

$$\begin{gathered}\iint\limits_{F}u^{m-1}(x,t)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\left\{\omega^k(x)+\omega^{k-1}(x)\left|\frac{\partial\omega}{\partial x}\right|\right\}\theta^k(t)dxdt\leqslant\\ \leqslant C_{10}R^2\int\limits_{B}\left|\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right|^2dx+C_{10}R^{n+\alpha}.\end{gathered}\tag{2.15}$$

Аналогичным образом оцениваются оставшиеся слагаемые правой части (2.6) при замене области интегрирования L на F.

Таким образом, из (2.6)-(2.15) получим (2.4)

Лемма 2.1. *Справедлива оценка*

$$\underset{0<t<T}{ess\sup}\int\limits_{L(t)}(u-l)\,\sigma^2(x)\theta^2(t)dx\leqslant C_{11}R^2\int\limits_{B}\left|\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right|^2dx+C_{11}R^{n+\alpha}.\tag{2.16}$$

Доказательство. Неравенство (2.16) получается подстановкой в интегральное тождество (1.5) функции

$$\varphi(x,t)=\frac{(u-l)_+}{u-l+\varepsilon}\sigma^2(x)\theta^2(t),\ \varepsilon>0.$$

При этом используется неравенство (2.14).

Пусть $R_0\in(0,1)$ и $\{R_j\}$, $j=1,2,\ldots$ – произвольная последовательность, удовлетворяющая условию $R_j\in\left[\frac{3R_0}{2^{j+2}},\ \frac{R_0}{2^j}\right]$. Обозначим $B_j=B(x_0,R_j)$. Выберем последовательность функций $\{\xi_j(x)\}$, так что $\xi_j(x)=0$ вне B_j, $\xi_j(x)=1$ на B_{j+1}, $\left|\frac{\partial\xi_j}{\partial x}\right|\leqslant\frac{2^{j+3}}{R_0}$, $0\leqslant\xi_j(x)\leqslant1$, $\xi_j(x)\in C_0^\infty(R^n)$.

Определим функции $g_j(x)\in C_0^\infty(B(x_0,1))$ так, чтобы $g_j(x)=1$ в $B_j\setminus\Omega$ и

$$\int\limits_{B(x_0,1)}\left|\frac{\partial g_j}{\partial x}\right|^2dx\leqslant C_0\cdot C(B_j\setminus\Omega)+R_j^n.\tag{2.17}$$

Пусть $g_i'(x)=\min\{1,[g_i(x)]_+\}$. Выберем последовательности функций $\{\eta_j(x)\}$, $\{\zeta_j(x)\}$, $\{\omega_j(x)\}$, $\{\sigma_j(x)\}$ следующим образом:

$$\eta_j(x)=\min\{1,3g_i'(x)+3g_{j-1}'(x)\},\ \zeta_j(x)=\min\{1,[2-3g_i'(x)]_+\},$$

$$\omega_j(x)=\xi_j(x)\zeta_j(x),\ \sigma_j(x)=\omega_j(x)\eta_j(x).$$

Определим также последовательность функций $\theta_j(t)=\overline{\theta}(R_j^{-2}(t-t_0))$, где $\overline{\theta}:R^1\to[0,1]$ – функция, удовлетворяющая условиям: $\overline{\theta}\in C^\infty(R^1)$, $\overline{\theta}(s)=1$ при $|s|<\frac{4}{9}$, $\overline{\theta}(s)=0$ при $|s|>1$, $\left|\frac{d\overline{\theta}}{ds}\right|\leqslant2$.

Выбор числовой последовательности $\{l_j\}$ будет сейчас указан. Положим $l_0 = \frac{1}{4}$ и предположим, что $l_1, ..., l_j$ уже выбраны. Покажем выбор l_{j+1}.

Обозначим

$$A_j(l) = \frac{1}{R_j^{n+2}} \iint\limits_{L_j} \left(\frac{u(x,t)-l_j}{l-l_j} \right)^{1+\frac{\lambda}{2}} \omega_j^{k-2}(x)\theta_j^{k-1}(t)dxdt+$$
$$+ess\sup_{0<t<T} \frac{1}{R_j^n} \int\limits_{L_j(t)} G\left(\frac{u(x,t)-l_j}{l-l_j} \right) \omega_j^k(x)\theta_j^{k-1}(t)dx, \tag{2.18}$$

где $L_j = \Omega_T \cap \{u > l_j\}$, $L_j(\tau) = \{(x,t) \in L_j : t = \tau\}$.

Пусть a – положительное число, выбор которого будет указан позже. Могут представиться две возможности:

1) существует число $l(a)$, удовлетворяющее условиям

$$l(a) \geqslant l_j + R_j, \quad A_j(l(a)) = a; \tag{2.19}$$

2) не существует числа $l(a)$, удовлетворяющего условиям (2.19), что означает $A_j(l_j + R_j) < a$.

В первом случае выбираем $l_{j+1} = l(a)$. Во втором случае определяем l_{j+1} равенством

$$l_{j+1} = l_j + R_j. \tag{2.20}$$

В силу выбора l_0 имеем неравенство $l_j > \frac{1}{4}$ при всех j.

В обеих случаях полагаем

$$\delta_j = l_{j+1} - l_j. \tag{2.21}$$

Отметим, что так построенные последовательности $\{l_j\}, \{\delta_j\}$ зависят от выбора числа a.

Теорема 2.2. *Предположим, что выполнены условия теоремы 2.1. Существуют постоянные $\overline{k}, a, K_2$, зависящие лишь от известных параметров, такие, что для последовательности $\{\delta_j\}$, определенной в (2.21), справедливо неравенство*

$$\delta_j \leqslant \frac{\delta_{j-1}}{2} + R_j + K_2 \left\{ \frac{C(B_{j-1} \setminus \Omega)}{R_j^{n-2}} + R_j^\alpha \right\} \tag{2.22}$$

при $k \geqslant \overline{k}$.

Доказательство. Достаточно доказать оценку (2.22) в предположении

$$\delta_j > \frac{1}{2}\delta_{j-1}, \ \delta_j > R_j. \tag{2.23}$$

В самом деле, если одно из неравенств в (2.23) не выполнено, то оценка (2.22) очевидна. Второе неравенство в (2.23) означает, что $l_{j+1} = l(a)$ с $l(a)$, удовлетворяющим условиям (2.19). Оценим слагаемые правой части (2.18) при $l = l_{j+1}$. Представим L_j в виде $L_j =$

$L'_j \cup L''_j$, где $L'_j = L_j \cap \left\{ \frac{u-l_j}{\delta_j} \leqslant \gamma \right\}$, $L''_j = L_j \cap \left\{ \frac{u-l_j}{\delta_j} > \gamma \right\}$ с некоторым $\gamma \in (0,1)$. Имеем

$$\frac{1}{R_j^{n+2}} \iint\limits_{L_j} \left(\frac{u(x,t)-l_j}{\delta_j} \right)^{1+\frac{\lambda}{2}} \omega_j^{k-2}(x) \theta_j^{k-1}(t) dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \gamma^{\frac{\lambda}{2}} \frac{1}{R_j^{n+2}} \left\{ \gamma\, mes\, E_j + \iint\limits_{F_j} \frac{u(x,t)-l_j}{\delta_j} \sigma_j^{k-2}(x) \theta_j^{k-1}(t) dxdt \right\} + \tag{2.24}$$

$$+ \frac{1}{R_j^{n+2}} \iint\limits_{L''_j} \left(\frac{u(x,t)-l_j}{\delta_j} \right)^{1+\frac{\lambda}{2}} \omega_j^{k-2}(x) \theta_j^{k-1}(t) dxdt.$$

По построению $\zeta_{j-1}(x) = 1, \xi_{j-1}(x) = 1$, $\theta_{j-1}(t) = 1$ на E_j, поэтому

$$mes\, E_j \leqslant \iint\limits_{E_j} \left(\frac{u(x,t) - l_{j-1}}{\delta_{j-1}} \right)^{1+\frac{\lambda}{2}} \omega_{j-1}^k(x)\, \theta_{j-1}^k(t) dxdt \leqslant a\, R_j^{n+2}. \tag{2.25}$$

Далее при $\overline{k} \geqslant 4$ имеем из неравенства Пуанкаре и (2.16)

$$\begin{aligned} & R_j^{-2-n} \iint\limits_{F_j} \frac{u(x,t)-l_j}{\delta_j} \sigma_j^{k-2}(x) \theta_j^{k-1}(t) dxdt \leqslant \\ & \leqslant C_{12} \frac{R_j^{2-n}}{\delta_j} \int\limits_{B_j} \left| \frac{\partial \sigma_j}{\partial x} \right|^2 dx + C_{12} \frac{R_j^{\alpha}}{\delta_j}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Определим $w_j(x,t)$ равенством (2.4) при $l = l_j$, $\delta = \delta_j$. Тогда на L''_j выполнена оценка

$$w_j(x,t) \geqslant C_{13}(\gamma) \left(\frac{u - l_j}{\delta_j} \right)^{\frac{2-\lambda}{4}}$$

и второй интеграл в правой части (2.24) оценивается

$$\frac{1}{R_j^{n+2}} \iint\limits_{L''_j} \left(\frac{u(x,t) - l_j}{\delta_j} \right)^{1+\frac{\lambda}{2}} \omega_j^{k-2}(x) \theta_j^{k-1}(t) dxdt \leqslant$$

$$\begin{aligned} & \leqslant \frac{\varepsilon}{R_j^{n+2}} \iint\limits_{L''_j} \frac{u(x,t)-l_j}{\delta_j} \left[\omega_j(x)\, \theta_j(t) \right]^2 dxdt + \\ & + C_{14}(\varepsilon, \gamma) \frac{1}{R_j^{n+2}} \iint\limits_{L''_j} w_j^{(\frac{\lambda}{2}z+1)\rho(\lambda)}(x,t) \left[\omega_j(x)\, \theta_j(t) \right]^{(k-4)z_1+2} dxdt. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Здесь ε – произвольное число из интервала (0,1), число z находится из условия

$$\left(\frac{\lambda}{2} z + 1 \right) \rho(\lambda) = 2\, \frac{n + \rho(\lambda)}{n}, \quad \rho(\lambda) = \frac{4}{2 - \lambda}.$$

Условие на λ обеспечивает выполнение неравенства $z > 1$. Имеем далее

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{R_j^{n+2}} \iint\limits_{L_j''} \frac{u(x,t)-l_j}{\delta_j} \left[\omega_j(x)\,\theta_j(t)\right]^2 dxdt \leqslant \\
\leqslant \frac{1}{R_j^{n+2}} \left\{ \iint\limits_{F_j \cap \{\frac{u-l_j}{\delta_j} > \gamma\}} \frac{u(x,t)-l_j}{\delta_j}\, \sigma_j^2(x)\, \theta_j^2(t) dxdt + \right. \\
\left. + \iint\limits_{E_j \cap \{\frac{u-l_j}{\delta_j} > \gamma\}} \frac{u(x,t)-l_j}{\delta_j} \left[\omega_j(x)\,\theta_j(t)\right]^2 dxdt \right\}.
\end{gathered}
\tag{2.28}
$$

Оценим второе слагаемое в правой части (2.28), учитывая, что $\xi_{j-1}(x) = \zeta_{j-1}(x) = \theta_{j-1}(t) = 1$ на E_j. Используя первое неравенство в (2.23), имеем

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{R_j^{n+2}} \iint\limits_{E_j \cap \{\frac{u-l_j}{\delta_j} > \gamma\}} \frac{u-l_j}{\delta_j} \left[\omega_j(x)\,\theta_j(t)\right]^2 dxdt \leqslant \\
\leqslant \frac{2}{R_j^n} \operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \int\limits_{L_j(t)} \frac{u-l_{j-1}}{\delta_{j-1}} \left[\omega_{j-1}(x)\,\theta_{j-1}(t)\right]^k dxdt \leqslant 2^{n+1} a.
\end{gathered}
\tag{2.29}
$$

Используя (2.16), (2.28), (2.29), получим

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{R_j^{n+2}} \iint\limits_{L_j''} \frac{u(x,t)-l_j}{\delta_j} \left[\omega_j(x)\,\theta_j(t)\right]^2 dxdt \leqslant \\
\leqslant C_{15}(\gamma) \left\{ a + \frac{1}{\delta_j R_j^{n-2}} \int\limits_{B_j} \left| \frac{\partial \sigma_j}{\partial x} \right|^2 dx + \frac{R_j^\alpha}{\delta_j} \right\}.
\end{gathered}
\tag{2.30}
$$

Оценим теперь второй интеграл в правой части (2.27), используя теорему вложения

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{R_j^{n+2}} \iint\limits_{L_j''} w_j^{2\frac{n+\rho(\lambda)}{n}}(x,t) \left[\omega_j(x)\,\theta_j(t)\right]^{(k-4)z_1+2} dxdt \leqslant \\
\leqslant C_{16} \frac{1}{R_j^{n+2}} \left\{ \operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \int\limits_{L_j(t)} \overline{w}_j^{\rho(\lambda)}(x,t) \left[\omega_j(x)\,\theta_j(t)\right]^2 dx \right\}^{\frac{2}{n}} \cdot \\
\cdot \iint\limits_{L_j} \left| \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \overline{w}_j(x,t) \left[\omega_j(x)\,\theta_j(t)\right]^{\frac{k-4}{2} z_1 + \frac{n-2}{n}} \right\} \right|^2 dxdt,
\end{gathered}
\tag{2.31}
$$

где $\overline{w}_j(x,t) = \max\{w_j(x,t),\, \Phi(\gamma)\}$ и функция $\Phi(z)$ определена в (2.4). Будем подчинять k условию

$$
(k-4)z + 2\frac{n-2}{n} > k + 2. \tag{2.32}
$$

Заметим, что, аналогично неравенству (2.30), можно доказать оценку

$$
\begin{gathered}
\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \int\limits_{L_j(t)} \overline{w}_j^{\rho(\lambda)}(x,t)\,\big[\omega_j(x)\,\theta_j(t)\big]^2 dx \leqslant \\
\leqslant C_{17}(\gamma)\, R_j^n \left\{ a + \frac{1}{\delta_j R_j^{n-2}} \int\limits_{B_j} \left|\frac{\partial \sigma_j}{\partial x}\right|^2 dx + \frac{R_j^\alpha}{\delta_j} \right\}.
\end{gathered} \tag{2.33}
$$

Второй множитель в правой части (2.31) оцениваем, используя теорему 2.1,

$$
\begin{gathered}
\iint\limits_{L_j} \left| \frac{\partial}{\partial x}\left\{ \overline{w}_j(x,t)\,\big[\omega_j(x)\,\theta_j(t)\big]^{\frac{k-4}{2}z_1+\frac{n-2}{n}} \right\}\right|^2 dxdt \leqslant \\
\leqslant C_{18}(\gamma) \left\{ \frac{1}{R_j^2} \iint\limits_{E_j} \left(1+\frac{u(x,t)-l_j}{\delta_j}\right)^{1-\frac{\lambda}{2}} \left(\frac{u(x,t)-l_j}{\delta_j}\right)^{\lambda} \omega_j^{k-2}(x)\theta_j^{k-1}(t)dxdt + \right. \\
\left. + \frac{R_j^2}{\delta_j} \int\limits_{B_j} \left|\frac{\partial \sigma_j}{\partial x}\right|^2 dx + \frac{R_j^{n+\alpha}}{\delta_j} + I \right\}, I = \iint\limits_{L_j} \overline{w}_j^2(x,t)\big[\omega_j(x)\,\theta_j(t)\big]^k \left|\frac{\partial \omega_j}{\partial x}\right|^2 dxdt.
\end{gathered} \tag{2.34}
$$

Представим интеграл I в виде суммы интегралов по E_j и F_j и оценим каждый из них. Получаем

$$
\begin{gathered}
I \leqslant \frac{C_{19}}{R_j^2} \iint\limits_{E_j} \left(1+\frac{u-l_j}{\delta_j}\right)^{1-\frac{\lambda}{2}} \left(\frac{u-l_j}{\delta_j}\right)^{\lambda} \big[\omega_j(x)\,\theta_j(t)\big]^k dxdt + \\
+ \frac{C_{19} R_j^2}{\delta_j^{1-\frac{\lambda}{2}}} \int\limits_{B_j} \left(\left|\frac{\partial \sigma_j}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial \zeta_j}{\partial x}\right|^2 \right) dx.
\end{gathered} \tag{2.35}
$$

Из (2.31)-(2.35), неравенства (2.8), (2.25) и равенства $A_j(l_{j+1}) = a$ получаем

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{R_j^{n+2}} \iint\limits_{L_j''} w_j^{(\frac{\lambda}{2}z+1)\rho(\lambda)}(x,t)\ \big[\omega_j(x)\,\theta_j(t)\big]^{(k-4)z_1+2} dxdt \leqslant \\
\leqslant C_{20}(\gamma) \left\{ a + \left(\frac{1}{\delta_j} + \frac{1}{\delta_j^{1-\frac{\lambda}{2}}}\right) R_j^{2-n} \int\limits_{B_j} \left(\left|\frac{\partial \sigma_j}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial \zeta_j}{\partial x}\right|^2 \right) dx + \frac{R_j^\alpha}{\delta_j} \right\}^{1+\frac{2}{n}}.
\end{gathered} \tag{2.36}
$$

Окончательно неравенства (2.24), (2.25), (2.27), (2.30), (2.36) приводят к оценке

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{R_j^{n+2}} \iint\limits_{L_j} \left(\frac{u(x,t)-l_j}{\delta_j}\right)^{1+\frac{\lambda}{2}} \omega_j^{k-2}(x)\,\theta_j^{k-1}(t)dxdt \leqslant \\
\leqslant C_{21}\big[\gamma^{1+\frac{\lambda}{2}} + \varepsilon\, C_{22}(\gamma)\big]\, a + C_{22}(\gamma) \left[\frac{1}{\delta_j R_j^{n-2}} \int\limits_{B_j} \left|\frac{\partial \sigma_j}{\partial x}\right|^2 dx + \frac{R_j^\alpha}{\delta_j} \right] + \\
+ C_{23}(\varepsilon,\gamma) \left\{ a + \frac{1}{R_j^{n-2}} \left(\frac{1}{\delta_j} + \frac{1}{\delta_j^{1-\frac{\lambda}{2}}}\right) \int\limits_{B_j} \left(\left|\frac{\partial \sigma_j}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial \zeta_j}{\partial x}\right|^2 \right) dx + \frac{R_j^\alpha}{\delta_j} \right\}^{1+\frac{2}{n}}.
\end{gathered} \tag{2.37}
$$

Займемся теперь оценкой второго слагаемого правой части (2.18). Имеем в силу теоремы 2.1

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \frac{1}{R_j^n} \iint\limits_{L_j(t)} G\left(\frac{u(x,t)-l_j}{\delta_j}\right)\left[\omega_j(x)\,\theta_j(t)\right]^k dx \leqslant$$

$$\leqslant C_{24}\left\{\frac{1}{R_j^{n+2}} \iint\limits_{E_j} \left(1+\frac{u(x,t)-l_j}{\delta_j}\right)^{1-\frac{\lambda}{2}} \left(\frac{u((x,t)-l_j}{\delta_j}\right)^{\lambda} \omega_j^{k-2}(x)\,\theta_j^{k-1}(t)dxdt+\right. \tag{2.38}$$

$$\left.+\frac{R_j^{2-n}}{\delta_j}\int\limits_{B_j}\left|\frac{\partial\sigma_j}{\partial x}\right|^2 dx+\frac{R_j^{\alpha}}{\delta_j}\right\}.$$

Представим первый интеграл правой части (2.38) в виде суммы интегралов по $E_j' = E_j \cap \left\{\frac{u-l_j}{\delta_j} \leqslant \gamma\right\}$, $\gamma \in [0,1]$ и $E_j'' = E_j \setminus E_j'$. Оценивая возникающие интегралы, получаем

$$\frac{1}{R_j^{n+2}} \iint\limits_{E_j} \left(1+\frac{u(x,t)-l_j}{\delta_j}\right)^{1-\frac{\lambda}{2}} \left(\frac{u(x,t)-l_j}{\delta_j}\right)^{\lambda} \omega_j^{k-2}(x)\,\theta_j^{k-1}(t)dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_{25}\left\{\gamma^{\lambda}\,\frac{1}{R_j^{n+2}}\,mes\,E_j'+\right. \tag{2.39}$$

$$\left.+\gamma^{-1+\frac{\lambda}{2}}\,\frac{1}{R_j^{n+2}}\iint\limits_{E_j''}\left(\frac{u-l_j}{\delta_j}\right)^{1+\frac{\lambda}{2}} \omega_j^{k-2}(x)\,\theta_j^{k-1}(t)dxdt\right\}.$$

Последний интеграл уже был оценен в (2.37).

Таким образом, из равенства $A_j(l_{j+1}) = a$ и оценок (2.37)-(2.39) получаем

$$a \leqslant C_{26}[\gamma^{\lambda}+C_{27}(\gamma)\,\varepsilon]\,a + C_{27}(\gamma)\left[\frac{R_j^{n-2}}{\delta_j}\int\limits_{B_j}\left|\frac{\partial\sigma_j}{\partial x}\right|^2 dx+\frac{R_j^{\alpha}}{\delta_j}\right]+$$

$$+C_{28}(\varepsilon,\gamma)\left\{a^{1+\frac{\lambda}{2}}+\left[\left(\frac{1}{\delta_j}+\frac{1}{\delta_j^{1-\frac{\lambda}{2}}}\right)\cdot\right.\right. \tag{2.40}$$

$$\left.\left.\cdot R_j^{2-n}\int\limits_{B_j}\left(\left|\frac{\partial\sigma_j}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial\zeta_j}{\partial x}\right|^2\right)dx+\frac{R_j^{\alpha}}{\delta_j}\right]^{1+\frac{2}{n}}\right\}.$$

Выберем вначале γ из условия

$$C_{26}\,\gamma^{\alpha} = \frac{1}{4}, \tag{2.41}$$

затем выбираем ε из условия

$$C_{26}\,C_{27}\,(\gamma)\,\varepsilon = \frac{1}{4}. \tag{2.42}$$

После выбора γ, ε выбираем a из условия

$$C_{28}\,(\varepsilon,\gamma)\,a^{\frac{2}{n}} = \frac{1}{4}. \tag{2.43}$$

Окончательно, из (2.40)-(2.43) следует выполнение хотя бы одного из неравенств

$$\frac{R_j^{2-n}}{\delta_j} \int\limits_{B_j} \left|\frac{\partial \sigma_j}{\partial x}\right|^2 dx \geqslant \frac{C_{27}^{-1}(\gamma) a}{16}, \tag{2.44}$$

$$\frac{R_j^{2-n}}{\delta_j} \int\limits_{B_j} \left(\left|\frac{\partial \sigma_j}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial \zeta_j}{\partial x}\right|^2 \right) dx \geqslant \left(\frac{C_{28}^{-1}(\varepsilon, \gamma) a}{48} \right)^{\frac{n}{n+2}}, \tag{2.45}$$

$$\frac{R_j^{2-n}}{\delta_j^{1-\frac{\lambda}{2}}} \int\limits_{B_j} \left(\left|\frac{\partial \sigma_j}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial \zeta_j}{\partial x}\right|^2 \right) dx \geqslant \left(\frac{C_{28}^{-1}(\varepsilon, \gamma) a}{48} \right)^{\frac{n}{n+2}}, \tag{2.46}$$

$$\frac{R_j^{\alpha}}{\delta_j} \geqslant \left(\frac{C_{28}^{-1}(\varepsilon, \gamma) a}{48} \right)^{\frac{n}{n+2}}. \tag{2.47}$$

Отметим еще оценку, следующую из (2.17)

$$\int\limits_{B_j} \left(\left|\frac{\partial \sigma_j}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial \zeta_j}{\partial x}\right|^2 \right) dx \leqslant C_{29} \{ C_2(B_{j-1} \setminus \Omega) + R_j^n \}. \tag{2.48}$$

Неравенства (2.44)-(2.48) приводят к оценке (2.22) и доказательство теоремы 2.2 завершено.

Теорема 2.3. *Предположим, что выполнены неравенство (2.1) и условия теоремы 2.2. Тогда существует последовательность* $\{R_j\}$, $R_j \in \left[\frac{3R_0}{2^{j+2}}, \frac{R_0}{2^j}\right]$ *такая, что*

$$\begin{aligned} \bar{l} \equiv \lim_{j\to\infty} l_j \leqslant \tfrac{1}{4} + K_3 \Bigg\{ \left[\tfrac{1}{R_0^n}\, ess \sup_{0<t<T} \int\limits_{\Omega} [u(x,t)]_+ dx \right]^{\frac{1}{2-\lambda}} + \\ + R_0^{\alpha} + \int\limits_0^{2R_0} \tfrac{C(B(x_0,r)\setminus\Omega)}{r^{n-1}}\, dr \Bigg\}, \end{aligned} \tag{2.49}$$

с α, *определенным в теореме 2.1, и постоянной* K_3, *зависящей лишь от известных параметров.*

Доказательство. Суммируя теперь (2.22) по $1 \leqslant j \leqslant J-1$, имеем

$$l_J \leqslant l_0 + C_{30} \left[\delta_0 + R_0 + R_0^{\alpha} + \sum_{j=1}^{J-1} \frac{C(B_{j-1} \setminus \Omega)}{R_j^{n-2}} \right]. \tag{2.50}$$

Выберем $R_j \in [R_j', R_j'']$, $R_j' = \frac{3}{4}\frac{R_0}{2^j}$, $R_j'' = \frac{R_0}{2^j}$ так, чтобы

$$\int\limits_{R_j'}^{R_j''} \frac{C(B(x_0,r)\setminus\Omega)}{r^{n-1}}\, dr = \frac{C(B_j \setminus \Omega)}{R_j^{n-2}}\, \ln\frac{4}{3}.$$

Тогда неравенство (2.50) приводит к оценке

$$l_J \leqslant \frac{1}{4} + C_{31}\left\{\delta_0 + R_0 + R_0^\alpha + \int\limits_0^{R_0} \frac{C(B(x_0,r)\setminus\Omega)}{r^{n-1}}\,dr\right\}. \tag{2.51}$$

Оценим теперь δ_0. Если l_1 определено равенством (2.20), то (2.49) сразу следует из (2.51). Если же l_1 определяется равенством $A_0(l_1) = a$, то выполнено хотя бы одно из неравенств

$$\frac{1}{R_0^{n+2}} \iint\limits_{B_0} \left(\frac{u(x,t)-l_0}{\delta_0}\right)^{1+\frac{\lambda}{2}} \theta_0^{k-1}(t)\,dxdt \geqslant \frac{a}{3},$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \frac{1}{R_0^n} \int\limits_{B_0} \left[\frac{u(x,t)-l_0}{\delta_0}\right]^{2-\lambda} \theta_0^{k-1}(t)\,dx \geqslant \frac{a}{3},$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \frac{1}{R_0^n} \int\limits_{B_0} \frac{u(x,t)-l_0}{\delta_0} \theta_0^{k-1}(t)\,dx \geqslant \frac{a}{3}.$$

Отсюда, используя ограниченность $u(x,t)$, получим

$$\delta_0 \leqslant C_{32}\left[\frac{1}{R_0^n} \operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \int\limits_\Omega [u(x,t)-1]_+ dx\right]^{\frac{1}{2-\lambda}}, \tag{2.52}$$

что и доказывает (2.49).

3. Доказательство теоремы 1.1.

Определение 3.1. Для произвольного множества $E \subset B\big(x_0, \frac{1}{2}\big) \times (0,T)$ определим параболическую емкость $\Gamma(E)$ равенством

$$\Gamma(E) = \inf_{\mathfrak{M}(E)} \left\{ \operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \int\limits_{R^n} \varphi^2(x,t)dx + \iint\limits_{R^{n+1}} \left|\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\right|^2 dxdt \right\}, \tag{3.1}$$

где $\mathfrak{M}(E) = \Big\{\varphi(x,t) \in C\big(0,T,L_2(B(x_0,1))\big) \cap L_2\big(0,T,\overset{\circ}{W}{}_2^1(B(x_0,1))\big) : \varphi(x,t) \geqslant 1,\ (x,t) \in E\Big\}$.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1 и неравенства (2.1). Тогда*

$$\inf\left\{ l : \int\limits_0^1 \frac{\Gamma\big(Q_r' \cap \{u > l\}\big)}{r^{n+1}}\,dr < \infty \right\} \leqslant \bar{l}, \tag{3.2}$$

где $\bar{l}$ определено в (2.49), $Q_r' = Q_r(x_0,t_0) \cap \Omega_T$.

Доказательство. Пусть $\{R_j\}, \{B_j\}, \{\xi_j(x)\}, \{\zeta_j(x)\}, \{\eta_j(x)\}, \{\theta_j(t)\}$ – последовательности, определенные в п.2.

Обозначим $Q_{j+1}' = \{B_{j+1} \cap \Omega\} \times \big(t_0 - R_{j+1}^2,\, t_0 + R_{j+1}^2\big)$, $Q_{j+1}'' = Q_{j+1}' \setminus G_{j+1}$, $G_{j+1} = \big\{(x,t) \in Q_{j+1}' : g_i(x) > \frac{1}{3}\big\}$, где $g_j(x)$ – функция, удовлетворяющая условия (2.17).

Определим функцию $w_\varepsilon(x,t)$ равенством

$$w_\varepsilon(x,t) = \Phi\left(\frac{u(x,t)-\bar{l}-\varepsilon}{\varepsilon}\right),$$

где $\varepsilon \in (0,1)$, $u(x,t)$ – решение уравнения (1.1), $\Phi(z)$ – функция, определенная равенством (2.4). Выполнено неравенство

$$w_\varepsilon(x,t) \geqslant \Phi(1) = \mu, \text{ если } u(x,t) \geqslant \bar{l} + 2\varepsilon. \tag{3.3}$$

Пусть k – число, удовлетворяющее условиям теоремы 2.2 и обозначим

$$\varphi_{\varepsilon,j}(x,t) = w_\varepsilon(x,t)\cdot\left[\xi_j(x)\,\zeta_j(x)\,\theta_j(t)\right]^{\frac{k}{2}} \text{ при } (x,t)\in\Omega_T. \tag{3.4}$$

Продолжая эту функцию нулем вне Ω_T и используя определение емкости Γ, получаем

$$\Gamma\left(Q''_{j+1}\cap\{u>\bar{l}+2\varepsilon\}\right) \leqslant \frac{1}{\mu^2}\left\{\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T}\int\limits_\Omega |\varphi_{\varepsilon,j}(x,t)|^2dx + \right.$$
$$\left. + \iint\limits_{\Omega_T}\left|\frac{\partial\varphi_{\varepsilon,j}(x,t)}{\partial x}\right|^2 dxdt\right\} \tag{3.5}$$

с постоянной μ, определенной в (3.3).

Применяя теорему 2.1, получаем оценку

$$\iint\limits_{\tilde{L}_j}\left|\frac{\partial w_\varepsilon(x,t)}{\partial x}\right|^2\omega_j^k(x)\,\theta_j^k(t)dxdt \leqslant$$
$$\leqslant C_{33}\,\frac{1}{R_j^2}\iint\limits_{\tilde{E}_j}\left[\frac{u-\bar{l}}{\varepsilon}\right]^{1-\frac{\lambda}{2}}\left(\frac{u-\bar{l}-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^\lambda\omega_j^{k-2}(x)\,\theta_j^{k-1}(t)dxdt + \tag{3.6}$$
$$+C_{33}\,\frac{R_j^2}{\varepsilon}\int\limits_{B_j}\left|\frac{\partial\sigma_j}{\partial x}\right|^2dx + C_{33}\,\frac{R_j^{n+\alpha}}{\varepsilon}.$$

Здесь $\widetilde{L}_j = Q_j\cap\Omega_T\cap\{u>\bar{l}+\varepsilon\}$, $\widetilde{E}_j = \widetilde{L}_j\cap\{\eta_j(x)<1\}$. Используя неравенства $l_j\leqslant\bar{l}$ и $A_j(l_{j+1})\leqslant a$, получаем

$$\frac{1}{R_j^2}\iint\limits_{\tilde{E}_j}\left(\frac{u(x,t)-\bar{l}}{\varepsilon}\right)^{1-\frac{\lambda}{2}}\left(\frac{u(x,t)-\bar{l}-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^\lambda\omega_j^{k-2}(x)\,\theta_j^{k-1}(t)dxdt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C_{34}(\varepsilon)}{R_j^2}\iint\limits_{E_j}(u(x,t)-l_j)^{1+\frac{\lambda}{2}}\omega_j^{k-2}(x)\,\theta_j^{k-1}(t)dxdt \leqslant C_{35}(\varepsilon)\,R_j^n\,\delta_j^{1+\frac{\lambda}{2}}. \tag{3.7}$$

Оценим первый интеграл в (3.5), замечая, что $w_\varepsilon(x,t)\leqslant C_{36}(\varepsilon)$ и $1<\frac{u(x,t)-\bar{l}}{\varepsilon}$ при $w_\varepsilon(x,t)\neq 0$. Используя неравенство $A_j(l_{j+1})\leqslant a$, получаем

$$\int\limits_\Omega|\varphi_{\varepsilon,j}(x,t)|^2dx \leqslant C_{37}(\varepsilon)\int\limits_{\{u(\cdot,t)>\bar{l}+\varepsilon\}}(u(x,t)-\bar{l})\left[\omega_j(x)\,\theta_j(t)\right]^k dx \leqslant$$
$$\leqslant C_{37}(\varepsilon)\int\limits_{L_{j+1}(t)}(u(x,t)-l_j)\left[\omega_j(x)\,\theta_j(t)\right]^k dx \leqslant C_{38}(\varepsilon)\,\delta_j\,R_j^n. \tag{3.8}$$

Аналогичными рассуждениями получается и следующая оценка

$$\iint\limits_{\Omega_T} |w_\varepsilon(x,t)|^2\,\omega_j^{k-2}(x)\,\theta_j^k(t)\left|\frac{\partial\omega_j}{\partial x}\right|^2 dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_{39}(\varepsilon)\left\{\iint\limits_{L_j}(u(x,t)-l_j)^{1+\frac{\lambda}{2}}\,\omega_j^{k-2}(x)\,\theta_j^k(t)\left|\frac{\partial\xi_j}{\partial x}\right|^2 dxdt+\right. \tag{3.9}$$

$$\left.+R_j^2\int\limits_{B_j}\left|\frac{\partial\zeta_j}{\partial x}\right|^2 dx\right\} \leqslant C_{40}(\varepsilon)\left\{\delta_j^{1+\frac{\lambda}{2}}\,R_j^n+R_j^2\left[C(B_{j-1}\setminus\Omega)+R_j^n\right]\right\},$$

где использовано неравенство (2.17).

Неравенства (3.5)-(3.9) дают нам оценку

$$\Gamma\big(Q''_{j+1}\cap\{u>\bar{l}+2\varepsilon\}\big)\leqslant C_{41}(\varepsilon)\,R_j^n\big\{\delta_j+R_j^{2-n}C(B_{j-1}\setminus\Omega)+R_j^\alpha\big\}. \tag{3.10}$$

Выбирая в определении Г-емкости $\varphi=\xi_j(x)\,g_j(x)\,\theta_j(t)$, получаем

$$\Gamma(G_{j+1})\leqslant C_{42}(\varepsilon)\,R_j^2\left[C(B_{j-1}\setminus\Omega)+R_j^n\right]. \tag{3.11}$$

Из неравенств (3.10), (3.11) получаем при достаточно большом J

$$\int\limits_0^{R_J}\frac{\Gamma\big(Q'_r\cap\{u>\bar{l}+\varepsilon\}\big)}{r^{n+1}}\,dr\leqslant$$

$$\leqslant C_{43}(\varepsilon)\sum\nolimits_{j=J}^\infty\left\{\delta_j+R_j^{2-n}C_p(B_{j-1}\setminus\Omega)+R_j^\alpha\right\}. \tag{3.12}$$

Используя условие (2.1) и теорему 2.3, получаем неравенство (3.2) из (3.12), что и заканчивает доказательство теоремы 3.1.

Доказательство теоремы 1.1. Пусть $f(x)$ – такая функция, что $f(x)\in C_0^\infty(R^n)$, $f(x)\equiv 1$ в некоторой окрестности точки x_0, $0\leqslant f(x)\leqslant 1$ и

$$\int\limits_{R^n} f^2(x)dx+\int\limits_{R^n}\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|^2 dx\leqslant\varepsilon^2, \tag{3.13}$$

ε – выбираемое дальше число из интервала (0,1). Пусть $g(t)\in C_0^\infty(0,T)$, $g(t)\equiv 1$ при $t\in\left(\frac{t_0}{2},\,\frac{t_0+T}{2}\right)$, $0\leqslant g(t)\leqslant 1$, $\left|\frac{dg(t)}{dt}\right|\leqslant C_{51}(t_0)$. Можем считать, что носитель функции $f(x)g(t)$ содержится в множестве $\mathcal{D}$ достаточно малой меры, так чтобы

$$\iint\limits_{\mathcal{D}}\left[h_0(x,t)+\overline{h}(x,t)\right]dxdt\leqslant\varepsilon^2. \tag{3.14}$$

Рассмотрим решение $u(x,t)$ уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям

$$u(x,t)=f(x)g(t),\ \ (x,t)\in S_T, \tag{3.15}$$

$$u(x,0)=0,\ \ x\in\Omega. \tag{3.16}$$

Подставляя в интегральное тождество (1.5) функцию $[u(x,t)]_h - f(x)\,g(t)$, мы получим

$$\mathop{ess\,sup}_{0<t<T} \int\limits_{\Omega} u^2(x,t)dx \leqslant C_{44}(t_0)\varepsilon^2. \tag{3.17}$$

Теперь из теоремы 2.3, получим

$$\bar{l} \leqslant \frac{1}{4} + C_{45}(t_0)\left\{\left(\frac{\varepsilon}{R_0^n}\right)^{\frac{1}{2-\lambda}} + R_0^{\alpha} + \int\limits_0^{R_0} \frac{C(B(x_0,r)\setminus\Omega)}{r^{n-1}}\,dr\right\}, \tag{3.18}$$

выбирая вначале R_0 так, чтобы

$$C_{45}(t_0)\,R_0^{\alpha} + C_{45}(t_0)\int\limits_0^{R_0} \frac{C_2(B(x_0,r)\setminus\Omega)}{r^{n-2}}\,\frac{dr}{r} \leqslant \frac{1}{4}, \tag{3.19}$$

а затем ε из условия

$$C_{45}(t_0)\left(\frac{\varepsilon}{R_0^n}\right)^{\frac{1}{2-\lambda}} \leqslant \frac{1}{4} \tag{3.20}$$

мы получим $\bar{l} \leq \frac{3}{4}$.

Из теоремы 3.1 получаем

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\big(Q'_r \cap \{u > l\}\big)}{r^{n+1}}\,dr < \infty \tag{3.21}$$

при $l > \frac{3}{4}$. Заметим (см. [9]), что для произвольной функции $\psi(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(B(x_0,1))$ имеет место неравенство

$$\int\limits_{B(x_0,r)} |\psi(x)|^2 dx \leqslant C_{46}\,r^2 \int\limits_{B(x_0,1)} \left|\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}\right|^2 dx \quad \text{при} \quad 0 < r < \frac{1}{2},$$

которое немедленно приводит к оценке

$$mes\,E \leqslant C_{47}\,r^2\,\Gamma(E), \text{ если } E \subset B(x_0,r)\times(t_0 - r^p, t_0 + r^p).$$

Из (3.21) и последнего неравенства имеем

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{mes\,(Q'_r \cap \{u > l\})}{r^{n+3}}\,dr < \infty. \tag{3.22}$$

Отсюда, в частности, следует

$$\lim_{r\to 0}\left\{r^{-n-2}\,mes\,(Q'_r \cap \{u > l\})\right\} = 0. \tag{3.23}$$

Аналогичные рассуждения и (2.1) приводят к равенству

$$\lim_{r\to 0}\left\{r^{-n}\, mes\,(B(x_0,r)\setminus\Omega)\right\}=0. \tag{3.24}$$

Из (3.23) и (3.24) получаем

$$\lim_{r\to 0}\left\{[mes\,Q_r]^{-1}\, mes\big(Q'_r\cap\{u\leqslant l\}\big)\right\}=1. \tag{3.25}$$

Равенство (3.25), справедливое при произвольном $l>\frac{3}{4}$, обеспечивает оценку

$$\lim_{r\to 0}\left\{ess\ \inf[u(x,t):(x,t)\in Q'_r]\right\}\leqslant\frac{3}{4}.$$

Таким образом, доказано, что равенство (1.7) не выполнено, и, следовательно, точка (x_0,t_0) – нерегулярная. Этим закончено доказательство теоремы 1.1.

1. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
2. *Aronson D.G., Benilan Ph.* Regularité des solutions de l'equation des milieux poreux dans R^n // Comptes Rendus Ac. Sci. 1979. V.A.288. P.103-105.
3. *Di Benedetto E.* A Holder estimates for nonlinear degenerate parabolic systems // J. Reine Angew. Math. 1985. V.357. P.1-22.
4. *Di Benedetto E.* Degenerate parabolic equations // New York: Springer-Verlag, 1993.
5. *Иванов А.В.* Оценки константы Гельдера обобщенных решений вырождающихся параболических уравнений // Зап. науч. семин. ЛОМИ. 1986. Т.152, С.21-44.
6. *Ziemer W.* Behavior at the boundary of solutions of quasilinear parabolic equations // J. Diff. Equat. 1980. V.35. No.3. P.291-305.
7. *Скрыпник И.В.* Необходимое условие регулярности граничной точки для квазилинейного параболического уравнения // Мат. сб. 1992. Т.183. No.7. С.3-22.
8. *Скрыпник И.И.* Регулярность граничной точки для вырождающихся квазилинейных параболических уравнений с измеримыми коэффициентами // Укр.мат.ж., 2000. Т.52, No.11. С.1550-1565.
9. *Скрыпник И.И.* Необходимое условие регулярности граничной точки для вырождающихся параболических уравнений с измеримыми коэффициентами // Труды ИПММ НАН Украины. 2003. Вып.8. С.147-167.
10. *Kilpeläinen T., Malý J.* The Wiener test and potential estimates for quasilinear elliptic equations // Acta Math. 1994. V.172. P.137-161.
11. *Скрыпник И.В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач М.: Наука, 1991.

ИПММ НАН Украины,
ул.Р.Люксембург, 74,
83114, Донецк, Украина

Получено 20.09.2003